УДК 530.182; 539.2

І.В. Герасимчук

ЛОКАЛІЗОВАНІ СТАНИ В ЛІНІЙНОМУ СЕРЕДОВИЩІ, В ЯКОМУ МІСТИТЬСЯ НЕЛІНІЙНИЙ ОПТИЧНИЙ ХВИЛЕВІД

Вступ

Дослідження умов поширення і характеру локалізації нелінійних хвиль у періодичних та модульованих системах є однією з основних задач динаміки нелінійних хвиль. Значну увагу за останні роки було приділено теоретичним і експериментальним дослідженням просторової локалізації світлових пучків великої потужності. Локалізація світлового потоку в напрямку, перпендикулярному напрямку його поширення, внаслідок нелінійного ефекту Керра, в нелінійному однорідному оптичному середовищі було відкрито в дослідженні [1], а теорію цього ефекту – описано в [2]. Як виявилось, така поперечна локалізація світлового потоку можлива і в лінійному оптичному середовищі поблизу плоского хвилеводу [3]. У 1996 р. в [4] теоретично було показано, що в системі плоскопаралельних хвилеводів при врахуванні керрівської нелінійності можлива локалізація пучка на кількох сусідніх хвилеводах (утворення просторового суперсолітону). Цей висновок було проілюстровано чисельно на простій моделі, що описується дискретним нелінійним рівнянням Шредінгера для амплітуд поля в хвилеводах. Пізніше така суперлокалізація світлового потоку спостерігалася експериментально [5], а результати порівнювалися з феноменологічною дискретною моделлю [4].

Проте, оскільки в разі слабкого зв'язку хвилеводів амплітуда поля в них істотно перевищує середню амплітуду в довкіллі, то можна враховувати нелінійні керрівські доданки лише в областях простору всередині самих хвилеводів. Виходячи з міркувань симетрії, зазначимо, що, наприклад, у системах з квадратичною нелінійністю нелінійні доданки мають враховуватись лише в області хвилеводів. Аналогічно можна описувати систему оптичних хвилеводів у вакуумі.

Постановка задачі

У даній статті в рамках дослідження локалізації хвиль у системах з керрівською нелінійністю всередині самих хвилеводів йдеться про вивчення проблеми локалізації солітонних станів поблизу одного нелінійного хвилеводу або ангармонічного дефекту і всіх можливих локалізованих модах у такій системі. Керрівська нелінійність враховуватиметься лише в області хвилеводів (які передбачаються набагато вужчими, ніж відстань між ними), а середовище між хвилеводами вважатиметься оптично лінійним. У даній ситуації через локалізацію хвилі в плоскому хвилеводі або локалізацію коливань на дефекті в ньому проявляються нелінійні властивості.

Локалізація солітонних станів поблизу нелінійного оптичного хвилеводу

Запишемо густину функції Лагранжа для повільної обвідної поля $E(z,t)$ (z – напрямок, перпендикулярний площинам паралельних хвилеводів)

$$L=\frac{i}{2}\left(E^*\frac{\partial E}{\partial t}-E\frac{\partial E^*}{\partial t}\right)-\left|\frac{\partial E}{\partial z}\right|^2+$$
$$+\sigma\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\delta(z-2aj)|E|^4+\alpha\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\delta(z-2aj)|E|^2 .$$

Тут параметр $\sigma=\pm1$ характеризує взаємодію елементарних збуджень всередині хвилеводів ($\sigma=+1$ відповідає їх взаємному тяжінню, $\sigma=-1$ – відштовхуванню) і α – характеризує величину дефектів (їх "потужність").

Рівняння руху в такій моделі має вигляд

$$i\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}+2\sigma\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\delta(z-2aj)|E|^2E=$$
$$=-\alpha\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\delta(z-2aj)E . \qquad (1)$$

В разі одного хвилеводу рівняння (1) спрощується:

$$i\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}+2\sigma\delta(z)|E|^2E=-\alpha\delta(z)E . \qquad (2)$$

Розглянемо спочатку більш простий випадок, коли хвилевід описується лише нелінійним доданком. Тоді рівняння (2) зводиться до виразу

$$i\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=-\beta\delta(z)|E|^2 E\,, \qquad (3)$$

а його розв'язком для стаціонарного локалізованого пучка, що поширюється, є функція

$$E=E_0\exp\{-\varepsilon|z|-i\omega t\}\,,$$

де $\varepsilon=\sqrt{-\omega}$; $E_0=\sqrt{2/\beta}\sqrt{\varepsilon}$.

У цьому випадку залежність частоти хвилі ω від амплітуди поля має такий самий вигляд, як і залежність частоти ангармонічного осцилятора від амплітуди його коливань:

$$\omega=-\frac{\beta^2}{4}E_0^4\,.$$

Зазначимо, що коли ввести повну "потужність" оптичного потоку (повна кількість елементарних збуджень у системі)

$$N=\int_{-\infty}^{+\infty}|E|^2 dz \qquad (4)$$

і його повну енергію

$$W=\int_{-\infty}^{+\infty}dz\left\{\left|\frac{\partial E}{\partial z}\right|^2-\frac{\beta}{2}\delta(z)|E|^4\right\},$$

то ці величини в даній моделі не залежатимуть від частоти ω: $N=\frac{2}{\beta}$, $W=0$. Проте дана властивість не є універсальною. При врахуванні нелінійності середовища навколо хвилеводу, коли в лівій частині (3) з'являється доданок $2|E|^2 E$, отримаємо $N=\frac{2}{\beta}\left[1+\varepsilon\beta-\sqrt{1+\varepsilon^2\beta^2}\right]$, а при врахуванні в хвилеводі лише лінійного показника заломлення, коли права частина рівняння (3) дорівнює $-\beta\delta(z)E$, то приходимо до такої залежності: $N=2\left(\varepsilon-\frac{\beta}{2}\right)$ [6].

Повернемося тепер до дослідження рівняння (2). Його розв'язання зводиться до розв'язання відповідного однорідного рівняння в областях $z>0$ і $z<0$ з граничними умовами при $z=0$:

$$E\big|_{+0}=E\big|_{-0}\,,$$

$$\left.\frac{\partial E}{\partial z}\right|_{+0}-\left.\frac{\partial E}{\partial z}\right|_{-0}=-2\sigma(|E|^2 E)\Big|_0-\alpha E\big|_0\,.$$

Шукатимемо стаціонарні розв'язки рівняння (2) у вигляді

$$E(z,t)=E(z)\exp(-i\omega t)\,,$$

де $E(z)\to 0$ при $z\to\pm\infty$. В результаті матимемо розв'язок

$$E(z,t)=\sqrt{\frac{2\varepsilon-\alpha}{2\sigma}}\exp\{-\varepsilon|z|\}\exp\{-i\omega t\}\,, \qquad (5)$$

який задовольняє граничні умови. Тут параметр — $\varepsilon=\sqrt{-\omega}$ і частота лінійного локального коливання — $\omega_l=-\alpha^2/4$.

Підставляючи розв'язок (5) у вираз (4), знайдемо залежність повного числа елементарних збуджень у локалізованому стані від частоти (величини ε):

$$N=\frac{\varepsilon-\alpha/2}{\sigma\varepsilon}\,. \qquad (6)$$

Вираз для повної енергії набуває вигляду

$$W=\int_{-\infty}^{+\infty}dz\left\{\left|\frac{\partial E}{\partial z}\right|^2-\sigma\delta(z)|E|^4-\alpha\delta(z)|E|^2\right\},$$

звідки знаходимо залежність енергії локалізованого стану від частоти:

$$W=-\frac{\alpha}{2}\frac{\varepsilon-\alpha/2}{\sigma}\,. \qquad (7)$$

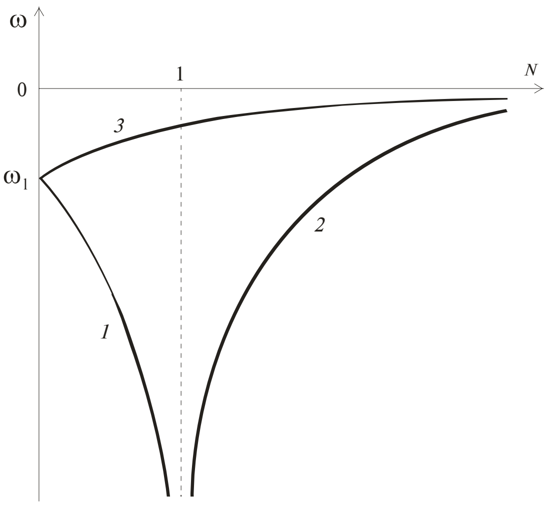
Виключаючи частоту із співвідношень (6) і (7), отримаємо залежність $W=W(N)$:

$$W=\omega_l N\big/(1-\sigma N)\,. \qquad (8)$$

Легко переконатися, що для знайденого розв'язку виконується звичайне співвідношення $\omega=\partial W/\partial N$ і залежність частоти від N має вигляд

$$\omega=\omega_l\big/(1-\sigma N)^2\,. \qquad (9)$$

При малих значеннях N із (9) маємо $\omega\approx\omega_l(1+2\sigma N)$. Залежності $\omega=\omega(N)$ для різних локалізованих станів наведено на рисунку.



Залежності $\omega = \omega(N)$ для різних станів, локалізованих біля нелінійного хвилеводу (дефекту) в лінійному середовищі при $\sigma = +1,\ \alpha > 0$ (крива *1*), $\sigma = +1,\ \alpha < 0$ (крива *2*) і $\sigma = -1,\ \alpha > 0$ (крива *3*)

Отже, у випадку притягання елементарних збуджень (дефекту) до хвилеводу ($\alpha > 0$) локалізовані стани в системі можуть існувати за будь-якого знаку σ; при $\sigma = -1$ локалізовані стани можливі тільки у випадку, коли $\alpha > 0$.

Висновки

За допомогою запропонованої моделі в оптичному лінійному середовищі досліджено всі можливі солітонні стани, локалізовані біля нелінійного хвилеводу. Було вивчено два основні випадки: коли хвилевід описується лише нелінійним доданком (3) і коли в описі хвилеводу враховується і лінійний вклад (2) (розглянуто всі можливі комбінації знаків параметрів σ і α). При цьому було доведено, що локалізовані біля нелінійного хвилеводу стани можливі за будь-якого знаку ангармонізму (знак σ) у випадку притягання елементарних збуджень до хвилеводу ($\alpha > 0$). Також було знайдено, що при взаємному відштовхуванні між елементарними збудженнями всередині хвилеводу ($\sigma = -1$) локалізовані стани можливі тільки у випадку $\alpha > 0$, тобто локалізовані стани біля притягувального хвилеводу можливі навіть при відштовхувальній взаємодії між збудженнями всередині хвилеводу. За допомогою запропонованої теоретичної моделі було знайдено повну кількість елементарних збуджень у системі N (6) та повну енергію системи W (7), залежність між ними в явному вигляді $W = W(N)$ (8), а також частотні залежності $\omega = \omega(N)$ для різних локалізованих біля нелінійного хвилеводу (дефекту) станів.

Досліджена аналітична проблема є першим етапом вивчення характеру локалізації хвиль у періодичних системах із великою кількістю ідентичних оптичних хвилеводів (плоскопаралельних дефектних шарів) і має дуже широкий спектр важливих фізичних застосувань – від нелінійної динаміки твердого тіла до нелінійних фотонних кристалів та періодичних систем хвилеводів у нелінійній оптиці. Особливо це стосується різноманітних випадків використання нелінійних оптичних хвилеводів у шаруватих оптичних середовищах.

Подальші дослідження будуть присвячені вивченню локалізованих станів у системі двох зв'язаних нелінійних хвилеводів. Кінцева мета дослідження цієї проблеми – опис періодичної послідовності плоскопаралельних нелінійних хвилеводів у лінійному середовищі, коли "потужність" дефектних шарів істотна (хвилеводи сильно притягують елементарні збудження) і хвилеводи слабо зв'язані між собою (амплітуда хвилі в хвилеводах істотно перевищує амплітуду в області між шарами).

И.В. Герасимчук

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ ОПТИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД

В данной статье в качестве первого шага исследования локализованных волн в периодической

I.V. Gerasimchuk

LOCALIZED STATES IN A LINEAR MEDIUM CONTAINING NONLINEAR OPTICAL WAVEGUIDE

This paper studies the soliton states localized near the nonlinear waveguide (anharmonic defect) in the системе, содержащей большое число идентичних оптических волноводов (плоскопараллельных дефектных слоев), в рамках нелинейного уравнения Шредингера исследованы солитонные состояния, локализованные вблизи нелинейного волновода (ангармонического дефекта) в оптически линейной среде. Описаны все возможные в такой системе локализованные состояния.

optically linear medium in the framework of nonlinear Schrödinger equation. It is the first step in the research of the localized waves in the periodic system containing a great number of identical optical waveguides (plane parallel defect layers). Moreover, all possible localized states in this system are described.

1. *Chiao R.Y., Garmire E., Townes C.H.* Self-trapping of optical beams // Phys. Rev. Lett. – 1964. – **13**, N 15. – P. 479–482.
2. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 61, вып. 1(7). – С. 118–134.
3. *Barthelemy A., Maneuf S., Froehly C.* Propagation of nonlinear magnetization waves in layered antiferromagnets // Opt. Commun. – 1985. – **55**, N 3. – P. 201–204.
4. *Aceves A.B., De Angelis C., Peschel et al.* Discrete self-trapping, soliton interactions, and beam steering in nonlinear waveguide arrays // Phys. Rev. E. – 1996. – **53**, N 1. – P. 1172–1189.
5. *Eisenberg H.S., Silberberg Y., Morandotti R. et al.* Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays // Phys. Rev. Lett. – 1998. – **81**, N 16. – P. 3383–3386.
6. *Богдан М.М., Герасимчук И.В., Ковалев А.С.* Динамика и устойчивость локализованных мод в нелинейных средах с точечными дефектами // Физика низких температур. – 1997. – **23**, № 2. – С. 197–207.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
27 травня 2009 року